ARITHMETISCHE THEOREME. II.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 16. OCTOBER 1884.

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von neuen arithmetischen Theoremen ableiten.

Multiplicirt man die Gleichung:

1) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^s},$$

und daher hat man die Formel:

2) $$\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \mu^2(r),$$

wo die Summation bezüglich d_2 über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist.

Nun ist:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right] \mu(x) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{yx^2}\right) \mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right)$$

und demnach ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 2) die Relation:

3) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt{n}\right]}\left[\frac{n}{x^2}\right]\mu(x)=\sum_{x=1}^{x=n}\mu^2(x)$$
$$=\mathfrak{Q}(n),$$

wo $\mathfrak{Q}(n)$ die Anzahl derjenigen Zahlen ist, welche nicht grösser als n und durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind.

Man hat also den Satz:

Dividirt man die ganze Zahl n durch die Quadrate jener ganzen, die Quadratwurzel aus n nicht übersteigenden Zahlen, welche nur verschiedene Primfactoren enthalten, und versieht die bei diesen Divisionen auftretenden Quotienten mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Basis des Divisors aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Ausdrücke gleich der Anzahl der in dem Intervalle $1\ldots n$ mit Einschluss der Grenzen befindlichen Zahlen, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind.

Für die Anzahl aller im Intervalle $1\ldots 100$ liegenden, durch kein Quadrat theilbaren Zahlen erhält man nach diesem Satze:

$$\mathfrak{Q}(100)=\left[\frac{100}{1^2}\right]-\left[\frac{100}{2^2}\right]-\left[\frac{100}{3^2}\right]-\left[\frac{100}{5^2}\right]+\left[\frac{100}{6^2}\right]-\left[\frac{100}{7^2}\right]+\left[\frac{100}{10^2}\right]$$
$$=100-25-11-4+2-2+1$$
$$=61.$$

Auf demselben Wege findet man:

$$\mathfrak{Q}(400)=\left[\frac{400}{1^2}\right]-\left[\frac{400}{2^2}\right]-\left[\frac{400}{3^2}\right]-\left[\frac{400}{5^2}\right]+\left[\frac{400}{6^2}\right]-\left[\frac{400}{7^2}\right]+\left[\frac{400}{10^2}\right]-$$
$$400-100-44-16+11-8+4-$$
$$-\left[\frac{400}{11^2}\right]-\left[\frac{400}{13^2}\right]+\left[\frac{400}{14^2}\right]+\left[\frac{400}{15^2}\right]-\left[\frac{400}{17^2}\right]-\left[\frac{400}{19^2}\right]$$
$$-3-2+2+1-1-1$$
$$=244.$$

Da bekanntlich:

4) $$\sum_{y=1}^{y=r}\left[\frac{m}{y}\right]\mu(y)=1\qquad (r\geqq m)$$

ist, so hat man auch:

$$\mathfrak{Q}(n)=\sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n}\left[\frac{n}{xy}\right]\mu^2(x)\,\mu(y)$$
$$=\sum_{y=1}^{y=n}\mu(y)\left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{y}\right]}\left[\frac{n}{xy}\right]\mu^2(x)\right)$$

also nach einem bekannten Satze:

5) $$\mathfrak{Q}(n)=\sum_{y=1}^{y=n}\varpi\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu(y),$$

welche Gleichung übrigens auch aus einer von mir früher mitgetheilten Formel („Zahlentheoretische Relationen." Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Classe, II. Abth., 89. Bd., p. 841 ff.) sich unmittelbar ergibt.

Schreibt man in der Gleichung 3) für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt sodann mit $\rho_{\varkappa,2}(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis n, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \rho_{\varkappa,2}(y) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \left[\frac{n}{x^2 y}\right] \mu(x)\, \rho_{\varkappa,2}(y)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \rho_{\varkappa,2}(d_2)\right).$$

Multiplicirt man die Gleichung 1) mit:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,2}(m)}{m^s} = \zeta(2s)\, \zeta(s-\varkappa),$$

so entsteht die Relation:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\, \rho_{\varkappa,2}(m)}{(mn^2)^s} = \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r^\varkappa}{r^s},$$

und daher hat man:

6) $$\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \rho_{\varkappa,2}(d_2) = r^\varkappa.$$

Es ist also:

7) $$\sum_{y=1}^{y=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \rho_{\varkappa,2}(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] r^\varkappa$$

$$= \Psi_\varkappa(n)$$

und speciell:

8) $$\sum_{y=1}^{y=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \rho_{0,2}(y) = \Psi(n).$$

Schreibt man nun in der Gleichung 7) für n: $\left[\frac{n}{z}\right]$, multiplicirt sodann mit $z^\varkappa \mu(z)$ und summirt bezüglich z von 1 bis n, so ergibt sich die Beziehung:

$$\sum_{y,\,z=1}^{y,\,z=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right) \rho_{\varkappa,2}(y)\, z^\varkappa \mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n} \Psi_\varkappa\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right) z^\varkappa \mu(z),$$

oder unter Berücksichtigung einer von mir a. a. O. mitgetheilten Formel:

9) $$\sum_{r=1}^{r=n} \mathfrak{Q}\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) \left(\sum_{d} \rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa \mu(d)\right) = n.$$

Schreibt man in der Gleichung 1) für $2s$: $s-\varkappa$ und multiplicirt mit $\zeta(2s)\zeta(s-\varkappa)$, so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\, n^\varkappa \rho_{\varkappa,2}(m)}{(mn)^s} = \zeta(2s)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2s}},$$

und daher ist:

10) $$\sum_{d} \mu(d)\, d^{x} \rho_{x,2}\left(\frac{r}{d}\right) = 0,$$

wenn r kein Quadrat ist, hingegen:

11) $$\sum_{d} \mu(d)\, d^{x} \rho_{x,2}\left(\frac{r}{d}\right) = 1,$$

wenn r ein Quadrat ist.

Die Gleichung 9) verwandelt sich daher in die schon von Herrn Bugajef auf anderem Wege abgeleitete Relation:

12) $$\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} \Omega\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right) = n.$$

Man hat also die Theoreme:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Factor enthalten, und beziehungsweise $\frac{n}{1^2}, \frac{n}{2^2}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}$ nicht überschreiten, ist gleich der Zahl n.

Die Anzahl derjenigen Zahlen, welche n nicht überschreiten und einen quadratischen Factor besitzen, ist gleich der Summe der Anzahlen der keinen quadratischen Factor enthaltenden Zahlen, welche beziehungsweise $\frac{n}{2^2}, \frac{n}{3^2}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}$ nicht überschreiten.

Ist z. B. $n = 100$, so sind unter den Zahlen, welche nicht grösser als:

$$\left[\frac{100}{2^2}\right] = 25, \left[\frac{100}{3^2}\right] = 11, \left[\frac{100}{4^2}\right] = 6, \left[\frac{100}{5^2}\right] = 4, \left[\frac{100}{6^2}\right] = 2, \left[\frac{100}{7^2}\right] = 2, \left[\frac{100}{8^2}\right] = 1, \left[\frac{100}{9^2}\right] = 1, \left[\frac{100}{10^2}\right] = 1,$$

sind, beziehungsweise:

16 8 5 3 2 2 1 1 1

Zahlen ohne quadratischen Theiler und daher gibt es in dem Intervalle 1 . . . 100 39 Zahlen, welche einen quadratischen Divisor besitzen.

Wird in der Gleichung 3) n durch $\left[\frac{n}{y}\right]$ ersetzt, sodann mit $\psi(y)$ multiplicirt und von $y = 1$ bis $y = n$ summirt, so entsteht die Relation:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\psi(y) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=[\sqrt{n}],\, y=n} \left[\frac{n}{x^2 y}\right] \mu(x)\, \psi(y)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \left(\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\psi(d_2)\right).$$

Aus der Gleichung 1) leitet man durch Multiplication mit:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\psi(m)}{m^s} = \zeta(s)^2$$

die folgende ab:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\psi(m)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\omega(r)}{r^s}.$$

und daher ist:

13) $$\sum_{d_2} \mu\left(\frac{r}{d_2}\right) \psi(d_2) = \omega(r).$$

Man hat also:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \psi(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \omega(r),$$

oder nach einem a. a. O. mitgetheilten Satze:

14) $$\sum_{y=1}^{y=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \psi(y) = \overline{\Psi}(n).$$

Schreibt man in dieser Formel wieder für n: $\left[\frac{n}{z}\right]$, multiplicirt mit $\mu(z)$ und summirt hierauf von $z = 1$ bis $z = n$, so ergibt sich die Beziehung:

$$\sum_{y,\,z=1}^{y,\,z=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right) \psi(y)\mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n} \overline{\Psi}\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right)\mu(z),$$

welche nach einer a. a. O. mitgetheilten Formel in die folgende übergeht:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d} \psi\left(\frac{r}{d}\right)\mu(d)\right) = \varpi(n).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 1), nachdem in derselben $2s$ durch s ersetzt wurde, mit:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\psi_\varkappa(m)}{m^s} = \zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)$$

so erhält man.

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)\,\psi_\varkappa(m)}{(mn)^s} = \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r^\varkappa}{r^s},$$

aus welcher Gleichung die Relation:

15) $$\sum_{d} \psi_\varkappa(d)\,\mu\left(\frac{r}{d}\right) = r^\varkappa$$

und speciell:

16) $$\sum_{d} \psi(d)\,\mu\left(\frac{r}{d}\right) = 1$$

folgt. Die letzte Formel ist übrigens auch ein specieller Fall der von mir früher mitgetheilten Gleichung („Über einige zahlentheoretische Functionen". Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wissensch., mathem. naturw. Classe, 89. Bd., II. Abth., p. 37 ff.):

$$\sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right) f_\beta(d) = f_{\beta-1}(r).$$

Es ist also schliesslich:

17) $$\sum_{r=1}^{r=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) = \varpi(n).$$

Diese Formel könnte man übrigens auch leicht aus der Gleichung 12) ableiten. Wird in dieser Relation n durch $\left[\frac{n}{x}\right]$ ersetzt, mit $\mu^2(x)$ multiplicirt und von $x=1$ bis $x=n$ summirt, so entsteht die Gleichung:

$$\sum_{r=1,\, x=1}^{r=[\sqrt{n}],\, x=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r^2 x}\right]\right)\mu^2(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu^2(x)$$

oder:

$$\sum_{r=1}^{x=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d_2}\mu^2(d_2)\right) = \bar{\omega}(n).$$

Aus der Gleichung:

$$18)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

folgt aber sofort:

$$\sum_{m,\, n=1}^{m,n=\infty}\frac{\mu^2(n)}{(nm^2)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^s},$$

also:

$$19)\qquad \sum_{d_2}\mu^2(d_2) = 1,$$

und daher ergibt sich wieder die Gleichung 17), aus welcher der folgende arithmetische Satz folgt:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Factor enthalten und beziehungsweise $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht überschreiten, ist gleich der Summe der Anzahlen der Zerlegungen aller ganzen Zahlen von 1 bis n in zwei zu einander relativ prime Zahlen.

Ein Corollar dieses Satzes ist das Theorem:

Die Summe der Anzahlen derjenigen ganzen Zahlen, welche keinen quadratischen Divisor besitzen und beziehungsweise $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übertreffen, ist stets ungerade.

Man hat z. B. für $n=20$:

$$\left[\frac{n}{r}\right] = 20,\ 10,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

$$\Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right) = 13,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

und da die Summe der letzten Zahlen 53 ist, so sieht man, dass sich alle Zahlen von 1 bis 20 incl. auf 53 verschiedene Arten in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen lassen.

Setzt man in der Gleichung 12) für n: $\left[\frac{n}{x}\right]$, multiplicirt mit $\mu(x)$ und summirt von $x=1$ bis $x=n$, so erhält man:

$$\sum_{r=1,\, x=1}^{r=[\sqrt{n}],\, x=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r^2 x}\right]\right)\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x),$$

also:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \Omega\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d_2}\mu(d_2)\right) = 1.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(n m^2)^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)}{r^s}$$

und daher:

20) $$\sum_{d_2} \mu(d_2) = \lambda(r).$$

Demnach entsteht die Relation:

21) $$\sum_{r=1}^{r=n} \mathfrak{Q}\left[\frac{n}{r}\right] \lambda(r) = 1.$$

Diese Gleichung liefert das Theorem:

Bestimmt man die Anzahlen jener ganzen Zahlen, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind und beziehungsweise die Brüche $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übertreffen, so ist die Summe derjenigen, welche einem aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzten Nenner entsprechen, um 1 grösser, als die Summe der übrigen.

Für $n = 20$ ist z. B. die erste Summe 27, die zweite 26.

Wird in der bekannten Formel:

22) $$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \lambda(x) = Q(n)$$

für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$ geschrieben, sodann mit $\mu^2(y)$ multiplicirt und von $y = 1$ bis $y = n$ summirt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu^2(y) = \sum_{x,y=1}^{x,y=n} \left[\frac{n}{xy}\right] \lambda(x)\, \mu^2(y)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \left(\sum_{d} \mu^2(d) \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\right).$$

Da nun:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu^2(n)\lambda(m)}{(mn)^s} = 1.$$

ist, so hat man:

23) $$\sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \mu^2(d) = 0$$

für $r > 1$ und:

24) $$\sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \mu^2(d) = 1$$

für $r = 1$.

Die letzte Formel verwandelt sich daher in die folgende von Herrn Bugajef mitgetheilte Relation:

25) $$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \mu^2(y) = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt das Theorem:

Die Summe der Anzahlen der Quadrate, welche beziehungsweise diejenigen unter den Brüchen $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ nicht übersteigen, deren Nenner durch kein Quadrat theilbar ist, hat den Werth n.

Für $n = 20$ hat man:

$$\left[\frac{n}{y}\right] = 20, 10, 6, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$$

$$\sum_{y=1}^{y=n} Q\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)\mu^2(y) = 4+3+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 20.$$

Schreibt man in der Gleichung 25) $\left[\frac{n}{z}\right]$ für n, multiplicirt mit $\mu(z)$ und summirt von $z=1$ bis $z=n$, so erhält man:

$$\sum_{y,z=1}^{y,z=n} Q\left(\left[\frac{n}{yz}\right]\right)\mu^2(y)\,\mu(z) = \sum_{z=1}^{z=n}\left[\frac{n}{z}\right]\mu(z),$$

oder nach bekannten Formeln:

26) $$\sum_{r=1}^{r=n} Q\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)\left(\sum_{d}\mu\left(\frac{r}{d}\right)\mu^2(d)\right) = \sum_{r=1}^{r=\left[\sqrt{n}\right]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right)\mu(r) = 1.$$

Zur Herleitung dieser Formel kann auch folgender Weg eingeschlagen werden.

Es ist:

$$\sum_{r=1}^{r=\left[\sqrt{n}\right]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right)\mu(r) = \sum_{r=1,\,x=1}^{r=\left[\sqrt{n}\right],\,x=n}\left[\frac{n}{r^2 x}\right]\lambda(x)\,\mu(r)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right]\left(\sum_{d_2}\lambda(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right).$$

Nun hat man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\mu(n)\lambda(m)}{(mn^2)^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\mu(r)}{r^s},$$

und daher:

27) $$\sum_{d}\lambda(d_2)\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \mu(r),$$

so dass die letzte Formel sich sofort in die Gleichung 26) verwandelt.

Man hat also folgendes Theorem:

Bestimmt man die Anzahlen der Quadrate, welche beziehungsweise diejenigen von den Brüchen $\frac{n}{1^2}, \frac{n}{2^2}, \ldots, \frac{n}{\left[\sqrt{n}\right]^2}$ nicht übertreffen, in denen die Basis des Nenners keinen quadratischen Divisor besitzt, versieht sodann jede dieser Zahlen mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die betreffende Basis aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Zahlen gleich 1.

Für $n = 100$ hat man:

$$\left[\frac{n}{r^2}\right] = 100, 25, 11, 4, 2, 2, 1$$

$$\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]} Q\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]\right)\mu(r) = 10-5-3-2+1-1+1 = 1.$$

Es ist:

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)}{\zeta(4s)} = \prod_p \frac{1+\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^s}},$$

wo das Product über alle Primzahlen p zu erstrecken ist.

Man hat nun:

$$\prod_p \frac{1+\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_p \left\{1+\frac{1}{p^{2s}}\right\} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{1}{p^{\lambda s}}$$

$$= \prod_p \left\{1+\frac{1}{p^s}+2\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{1}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}\,n^s}$$

wo $\tau(n)$ die Anzahl jener Primfactoren von n ist, welche nur in der ersten Potenz in n enthalten sind.

Es ist also:

28) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}\,n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)}{\zeta(4s)}.$$

Nun ist aber auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu^2(n)}{(mn^2)^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(4s)}\,\zeta(s),$$

und daher hat man:

29) $$\sum_{d_2} \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \frac{\omega(r)}{2^{\tau(r)}} = 2^{\bar{\omega}(r)-\tau(r)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der arithmetische Satz:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche ein Quadrat, aber durch keine vierte Potenz theilbar sind, ist stets gerade, ausser wenn die betreffende Zahl nur verschiedene Primfactoren enthält, in welchem Falle der einzige der angegebenen Bedingung genügende Divisor 1 ist.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\mu^2(x) = \sum_{x=1,\,y=1}^{x=[\sqrt{n}],\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^2y}\right)\mu^2(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d_2}\mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right)$$

und daher:

30) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right]\mu^2(x) = \sum_{r=1}^{r=n} 2^{\bar{\omega}(r)-\tau(r)}.$$

Aus 28) folgt auch:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega(n)}{2^{\tau(n)}(n m^4)^s} = \zeta(2s)\,\zeta(s)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{0,2}(r)}{r^s},$$

demnach ist:

31) $$\sum_{d_4} \frac{\omega(d_4)}{2^{\tau(d_4)}} = \sum_{d_4} 2^{\bar{\omega}(d_4)-\tau(d_4)} = \rho_{0,2}(r),$$

wo die Summation bezüglich d_4 über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine vierte Potenz ist.

Es ist:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \Psi_\varkappa\Big(\Big[\frac{n}{y^2}\Big]\Big)\, y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{x,\,y=1}^{x,y=n} \Big[\frac{n}{xy^2}\Big]\,(xy^2)^\varkappa \mu(y)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \Big[\frac{n}{r}\Big]\, r^\varkappa \Big(\sum_{d_2} \mu\Big(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\Big)\Big),$$

oder nach 2):

32) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \Psi_\varkappa\Big(\Big[\frac{n}{y^2}\Big]\Big)\, y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \Big[\frac{n}{r}\Big]\, r^\varkappa \mu^2(r).$$

Den speciellen Fall $\varkappa = 0$ dieser Formel:

33) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \Psi\Big(\Big[\frac{n}{y^2}\Big]\Big)\, \mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \Big[\frac{n}{r}\Big]\mu^2(r)$$
$$= \bar{\omega}(n)$$

hat Herr F. Mertens mitgetheilt („Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie". Journal für die reine und angewandte Mathematik von C. W. Borchardt, 77. Band, p. 289 ff.).

Nun ist:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \Big[\frac{n}{r}\Big]\, r^\varkappa \mu^2(r) = \sum_{x,\,r=1}^{x,r=n} \varepsilon\Big(\frac{n}{xr}\Big)\, r^\varkappa \mu^2(r)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\Big(\frac{n}{r}\Big)\Big(\sum_{d} d^\varkappa \mu^2(d)\Big)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \bar{\psi}_\varkappa(r),$$

wo $\bar{\psi}_\varkappa(r)$ die Summe der $\varkappa$ten Potenzen jener Divisoren von r ist, welche durch kein Quadrat theilbar sind.

Die Gleichung 32) verwandelt sich daher in die folgende:

34) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt{n}]} \Psi_\varkappa\Big(\Big[\frac{n}{y^2}\Big]\Big)\, y^{2\varkappa}\mu(y) = \sum_{r=1}^{r=n} \bar{\psi}_\varkappa(r).$$

Zu anderen arithmetischen Theoremen führen sofort folgende aus der Gleichung 3), den in der Arbeit über zahlentheoretische Functionen enthaltenen Formeln 134), 138)... 144), 149) und der in meiner Mittheilung über zahlentheoretische Relationen aufgestellten Beziehung 18) sich ergebende Gleichungen:

35) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{pn}]} \eta_{p,\,pn,\,x^2}\,\mu(x) = \mathfrak{Q}(pn) - p\,\mathfrak{Q}(n)$$

36) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\varphi_{\varkappa}(x) = S_{\varkappa}(pn) - p\,S_{\varkappa}(n)$$

37) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x) = Q(pn) - p\,Q(n)$$

38) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\omega(x) = \Psi(pn) - p\,\Psi(n)$$

39) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\omega(x)\,\lambda(x) = \Lambda(pn) - p\,\Lambda(n)$$

40) $$\sum_{x=1}^{x=\left[(pn)^{\frac{1}{\tau}}\right]} \eta_{p,\,pn,\,x}\,x^{\tau\varkappa} = \bar{P}_{\varkappa,\tau}(pn) - p\,P_{\varkappa,\tau}(n)$$

41) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x)\,\psi_{\varkappa}(x) = \bar{\rho}_{\varkappa,2}(pn) - p\,\bar{\rho}_{\varkappa,2}(n) \qquad \left(\bar{\rho}_{\varkappa,2}(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \rho_{\varkappa,2}(x)\right)$$

42) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\lambda(x)\,P_{\varkappa,2\tau}(x) = \tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(pn) - p\,\tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(n) \qquad \left(\tilde{P}_{\varkappa,\tau}(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} P_{\varkappa,\tau}(x)\right)$$

43) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,f_{\beta-1}(x) = F_{\beta}(pn) - p\,F_{\beta}(n)$$

44) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\psi(x^2) = \tilde{\Psi}(pn) - p\,\tilde{\Psi}(n)$$

45) $$\sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,\,pn,\,x}\,\mu^2(x) = \bar{\omega}(pn) - p\,\bar{\omega}(n).$$

Aus diesen Formeln ergeben sich sofort die speciellen Relationen:

46) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{2n}]}{}'' \mu(x) = \mathfrak{Q}(2n) - 2\mathfrak{Q}(n)$$

47) $$\sum_{x=1}^{x=2n}{}' \varphi_{\varkappa}(x) = S_{\varkappa}(2n) - 2S_{\varkappa}(n)$$

48) $$\sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x) = Q(2n) - 2Q(n)$$

49) $$\sum_{x=1}^{x=2n}{}' \omega(x) = \Psi(2n) - 2\Psi(n)$$

$$50)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,\omega(x) = \Lambda(2n)-2\Lambda(n)$$

$$51)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[(2n)^{\frac{1}{\tau}}\right]}{}' x^{\tau\varkappa} = P_{\varkappa,\tau}(2n)-2P_{\varkappa,\tau}(n)$$

$$52)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,\psi_\varkappa(x) = \bar{p}_{\varkappa,2}(2n)-2\bar{p}_{\varkappa,2}(n)$$

$$53)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \lambda(x)\,P_{\varkappa,2\tau}(x) = \tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(2n)-2\tilde{P}_{2\varkappa,\tau}(n)$$

$$54)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' f_{\beta-1}(x) = F_\beta(2n)-2F_\beta(n)$$

$$55)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \psi(x^2) = \tilde{\Psi}(2n)-2\tilde{\Psi}(n)$$

$$56)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' \mu^2(x) = \bar{\omega}(2n)-2\bar{\omega}(n)$$

Setzt man in den Formeln 40) und 51) speciell $\tau = 1$, so erhält man:

$$57)\quad \sum_{x=1}^{x=pn} \eta_{p,pn,x}\, x^\varkappa = \Psi_\varkappa(pn)-p\Psi_\varkappa(n)$$

$$58)\quad \sum_{x=1}^{x=2n}{}' x^\varkappa = \Psi_\varkappa(2n)-2\Psi_\varkappa(n)$$

Die Formeln 36) und 47) für $\varkappa = 1$, 48), 54) für $\beta = 2$, 58) für $\varkappa = 0$, 1 hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Von den in den obigen Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl der in dem Intervalle $n+1\ldots 2n$ enthaltenen durch kein Quadrat theilbaren Zahlen übertrifft die Anzahl der in dem Intervalle $1\ldots n$ enthaltenen Zahlen derselben Beschaffenheit um eben so viel, als die Anzahl der aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfactoren zusammengesetzten Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x^2}\right]$ ungerade ist, grösser ist, als die Anzahl der übrigen die eben genannte Bedingung erfüllenden Zahlen.

Bestimmt man für jede der Zahlen, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, die Anzahl aller sie nicht übertreffenden Zahlen, welche zu ihr relativ prim sind, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich n^2.

Diejenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die Anzahl der Divisoren der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen von der Anzahl der Divisoren der Quadrate der folgenden n Zahlen übertroffen wird.

Die Summe der $(\tau\varkappa)$ten Potenzen jener Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der $\varkappa$ten Potenzen jener Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen, welche τte Potenzen

sind, kleiner ist, als die Summe der $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Divisoren der folgenden n Zahlen, welche τte Potenzen sind.

Die Summe der $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen von der Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren der folgenden n Zahlen übertroffen wird.

Diejenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, können so oft als Producte von $\beta-1$ Zahlen dargestellt werden, als die Zahl beträgt, um welche die ersten n natürlichen Zahlen sich weniger oft als Producte von β Factoren darstellen lassen, als die folgenden n Zahlen.

Die Anzahl der Divisoren der Quadrate derjenigen Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, ist gleich der Zahl, um welche die Summe der Quadrate der Anzahlen der Divisoren der ersten n natürlichen Zahlen kleiner ist, als die Summe der Quadrate der Anzahlen der Divisoren der folgenden n Zahlen.

Es gibt so viele, durch kein Quadrat theilbare Zahlen x, für welche $\left[\frac{2n}{x}\right]$ ungerade ist, als die Differenz aus der Anzahl der Zerlegungen der ersten n natürlichen Zahlen in zwei zu einander relativ prime Zahlen und der erwähnten Anzahl für die folgenden n Zahlen beträgt.

Um zu anderen arithmetischen Theoremen zu gelangen, setze ich in der Formel:

59) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]}F\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]F(p)\qquad(\alpha\leqq 2n-1)$$

60) $$p=\left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]=\sigma$$

Alsdann wird:

$$\left[\frac{\alpha}{2p+1}\right]=\sigma+\varkappa,$$

und daher:

$$[\alpha]=2\sigma^2+(2\varkappa+1)\sigma+\varkappa+\varepsilon\qquad(0\leqq\varepsilon<2\sigma+1).$$

Aus 60) folgt aber:

$$2\sigma^2\leqq\alpha<2\sigma^2+4\sigma+2,$$

und desshalb hat man auch:

$$\varkappa<2$$

$$0\leqq(2\varkappa+1)\sigma+\varkappa+\varepsilon,$$

oder, weil ε niemals grösser als 2σ werden kann:

$$0\leqq 2\varkappa+3.$$

Es kann demnach $\varkappa$ nur einen der drei Werthe -1, 0, $+1$ haben.

Ist $\varkappa=-1$, so hat man:

$$\frac{\alpha+\sigma}{2\sigma}=\sigma+\frac{\varepsilon-1}{2\sigma},$$

und da in diesem Falle ε nicht gleich Null sein kann, weil sonst:

$$[\alpha]=2\sigma^2-\sigma-1$$

wäre, so ist:

$$\left[\frac{\alpha+\sigma}{2\sigma}\right]=\sigma.$$

Ist ferner $\varkappa = +1$, so hat man:

$$\frac{\alpha+\sigma+1}{2(\sigma+1)} = \sigma+1+\frac{\varepsilon}{2\sigma+2},$$

und daher:

$$\left[\frac{\alpha+\sigma+1}{2(\sigma+1)}\right] = \sigma+1.$$

Berücksichtigt man, dass $\varkappa$ nur dann den Werth $+1$ haben kann, wenn:

61) $$2\sigma^2+3\sigma \leqq [\alpha] < 2\sigma^2+4\sigma+2$$

ist, so erhält man schliesslich:

62) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\sigma}F\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\sigma F(\sigma)+\eta f(\sigma+1),$$

wo η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem α der Bedingung 61) genügt oder nicht.

Gibt man in dieser Formel der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe:

63) $$f(x) = 1,\ x,\ x^3,\ x^m-(x-1)^m,\ \sin\frac{(2x-1)\pi}{4},\ \cos\frac{(2x-1)\pi}{4},\ \cos x\vartheta,\ \sin x\vartheta,\ \log(2x-1),\ (2x-1)^m-(2x-3)^m,$$

so erhält man die Gleichungen:

64) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]+\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]-(\sigma^2-\eta)$$

65) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\sigma}D\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\frac{(\sigma+1)(\sigma^2-2\eta)}{2}$$

66) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^3 = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\sigma}D^2\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-(\sigma+1)^2\left\{\frac{\sigma^3}{4}-\eta(\sigma+1)\right\}$$

67) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](x-1)^m = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](x-1)^m+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]^m-\sigma^m(\sigma+\eta)+\eta(\sigma+1)^m$$

68) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4} = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\sigma\sqrt{2}\sin^2\frac{\sigma\pi}{4}+$$
$$+\eta\sin\frac{(2\sigma+1)\pi}{4}$$

69) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4} = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin\frac{\sigma\pi}{2}+$$
$$+\eta\cos\frac{(2\sigma+1)\pi}{4}$$

$$70)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos x\vartheta = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\cos x\vartheta + \sum_{x=1}^{x=\sigma}\frac{\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]+\frac{1}{2}\right\}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\sigma\sin\frac{(2\sigma+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + 2\eta\cos(\sigma+1)\vartheta$$

$$71)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin x\vartheta = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\sin x\vartheta - \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]+\frac{1}{2}\right\} + \frac{\sigma\cos\frac{(2\sigma+1)\vartheta}{2}}{\sigma\sin\frac{\vartheta}{2}} +$$
$$+ 2\eta\sin(\sigma+1)\vartheta$$

$$72)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = 2\sum_{x=1}^{x=\sigma}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\sigma}(-1)^{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]} + (-1)^{\sigma+1}(\sigma+2\eta)$$

$$73)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] + \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\sin\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) -$$
$$- \sigma\sqrt{2}\sin\frac{(2\sigma+1)\pi}{4} + \eta\left((-1)^{\frac{\sigma+1}{2}} + (-1)^{\frac{3\sigma+1}{2}}\right)$$

$$74)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right] - \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\sigma}\cos\left(\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) +$$
$$+ \sigma\sqrt{2}\cos\frac{(2\sigma+1)\pi}{4} + \eta\left((-1)^{\frac{\sigma}{2}} - (-1)^{\frac{3\sigma+2}{2}}\right)$$

$$75)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\log(2x-1) = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right]\log(2x-1) + \sum_{x=1}^{x=\sigma}\log\frac{\Gamma\left(2\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]\right)}{2^{\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]}\Gamma\left(\left[\frac{\alpha+3x}{2x}\right]\right)} - \sigma\log\frac{\Gamma(2\sigma)}{2^{\sigma}\Gamma(\sigma-1)} +$$
$$+ \eta\log(2\sigma+1)$$

$$76)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-1)^m - \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-3)^m = \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-1)^m - \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left[\frac{\alpha}{2x-1}\right](2x-3)^m +$$
$$+ \sum_{x=1}^{x=\sigma}\left\{2\left[\frac{\alpha+x}{2x}\right]-1\right\}^m - (\sigma+\eta)(2\sigma-1)^m + \eta(2\sigma+1)^m.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^2-\eta$ kleiner als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen der eben genannten um die Zahl 2 verminderten Divisoren um eben so viel, als die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen Zahlen, welche man erhält, wenn man von den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{1},\ \frac{n+2}{2},\ \frac{n+3}{3},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, 2 oder 1 subtrahirt, je nachdem die betreffende Zahl ungerade oder gerade ist, grösser ist, als die Differenz

$$\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+\eta\right\}\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1\right\}^{m}-\eta\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1\right\}^{m}.$$

Die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^{3}-2\eta$ kleiner, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r-1$ und grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen die angegebene Grenze überschreitenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, von der Summe aus der Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen und den Ausdruck

$$(-1)^{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1}\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+2\eta\right\}$$

übertroffen wird.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r+1$ und grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren, welche von der Form $8r-3$ sind, und die angegebene Grenze überschreiten, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+3$ sind, von der Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\cos\frac{\pi}{4}\left\{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+1\right\}+\gamma\left\{(-1)^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}+(-1)^{\frac{3}{2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}\right\}$$

übertroffen wird.

Die doppelte Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, vermehrt um ihre Anzahl ist um $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+1\right]\left\{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]^2-2\gamma\right\}$ kleiner, als die doppelte Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind.

Die vierfache Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1$ sind, übertrifft ihre vierfache Anzahl um eben so viel, als der Ausdruck

$$\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\left\{\left(2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]-1\right)^2-8\gamma\right\}$$

von der Summe der Quadrate derjenigen Zahlen übertroffen wird, welche man erhält, wenn man von den grössten ganzen Zahlen, die in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{1},\ \frac{n+2}{2},\ \frac{n+3}{3},\ldots,\ \frac{n+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$$

enthalten sind, 2 oder 1 subtrahirt, je nachdem die betreffende Zahl ungerade oder gerade ist.

Man sieht sofort, dass die Anzahlen derjenigen Zahlen, für welche $\gamma=1$ ist, eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede 2 und der Differenz 1 bilden, während die Anzahlen jener Zahlen, für welche $\gamma=0$ ist, eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede 3 und der Differenz 3 bilden.

Um zu neuen Sätzen zu gelangen, betrachte ich zunächst die Summe:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]f(x).$$

Es sei:

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{b(p+1)^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]=A$$

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bn^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]=B.$$

Die in der Summe:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\,\right]f(x)$$

auftretenden ganzen Zahlen:

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]$$

erhalten ersichtlich nur die Werthe A, $A-1$, $A-2, \ldots, B+1$, B und zwar wird, da aus der Relation:

$$\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{b(x+1)^\sigma+\beta}-\rho} \leqq y < \sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}$$

die Gleichung:

$$x = \left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]$$

folgt, der Werth A für alle x:

$$\text{von } x=p+1 \quad \text{bis } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]$$

der Werth B für alle x:

$$\text{von } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right]+1 \quad \text{bis } x=n$$

ein zwischen A und B liegender Werth y für alle x:

$$\text{von } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(y+1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right]+1 \quad \text{bis } x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]$$

angenommen.

Es ist also:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = A\left\{f(p+1)+f(p+2)+\ldots+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)\right\}+$$

$$+(A-1)\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(A^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}+2\right]\right)+\ldots+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)\right\}+$$

$$+(A-2)\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}+2\right]\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(A-2)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)\right\}+$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;+$$

$$+B\left\{f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}+1\right]\right)+f\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{(B+1)^\tau+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}+2\right]\right)+\ldots+f(n)\right\},$$

oder:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)-A\,F(p)+B\,F(n).$$

Man hat daher die Relation:

$$77)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x)+\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right)-A\,F(p)+BF(n).$$

Sind α, β, b, n, ρ, σ so beschaffen, dass:

$$B = 0$$

wird, so hat man:

78) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) + \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right) - A\,F(p).$$

Für $p=0$ verwandeln sich diese Formeln in die folgenden:

79) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right) + B\,F(n)$$

80) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(x^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]\right).$$

Es sei nun speciell:

$$b=\tau=1\,, \quad \beta=\rho=0\,, \quad \alpha \leqq n\,.$$

Alsdann ist:

$$A = \left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]$$

$$B = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

und demnach:

$$B\,F(n) = \begin{cases} 0 \\ F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{1}}\right]\right), \end{cases}$$

und daher hat man die Relationen:

81) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right) - \left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right]F(p)$$

82) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x) = \sum_{x=1}^{x=[\alpha]} F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right).$$

Setzt man:

83) $$p = \left[\alpha^{\frac{1}{1+\sigma}}\right] = \mu_\sigma,$$

so ist:

84) $$p^{\sigma+1} \leqq \alpha < (p+1)^{1+\sigma},$$

und daher:

$$A = \left[\frac{\alpha}{(p+1)^\sigma}\right] < p+1.$$

Ist nun:

$$A = p - \varkappa\,,$$

so hat man:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{p-\lambda}} < p+1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1),$$

aber auch nach 84):

$$p \leqq \sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{p}},$$

und daher:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{p-\lambda}}\right]=p \quad (\lambda=0,\,1,\,2,\ldots,\,\varkappa-1).$$

Man hat daher die Relation:

85) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_\sigma F(\mu_\sigma).$$

Gibt man der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe 63) mit Ausnahme der letzten zwei, so erhält man die Formeln:

86) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]$$

87) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=}^{x=\mu_\sigma}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]-\mu_\sigma^2$$

88) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=[\sigma]}D\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

89) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}D\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_\sigma D(\mu_\sigma)$$

90) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}D^2\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

91) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}D^2\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\mu_\sigma D^2(\mu_\sigma)$$

92) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=[\sigma]}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]^m$$

93) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]^m-\mu_\sigma^{m+1}$$

94) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

95) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\sqrt{2}\mu_\sigma\sin^2\frac{\mu_\sigma\pi}{4}$$

96) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)$$

97) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]\right)-\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{2}}\sin\frac{\mu_\sigma\pi}{2}$$

98) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta = \sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{[\alpha]}{2}$$

99) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta = -\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right)}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} + \frac{[\alpha]}{2}\operatorname{cotang}\frac{\vartheta}{2}$$

100) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta = \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta + \frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right) - \frac{\mu_\sigma\sin\frac{(2\mu_\sigma+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

101) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta = \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta - \frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+1\right\}\right) + \frac{\mu_\sigma\cos\frac{(2\mu_\sigma+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

102) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]^2$$

103) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right](2x-1) + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right]^2 - \left[\sqrt{n}\right]^3$$

104) $$2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = \sum_{x=1}^{x=[\alpha]}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]} - [\alpha]$$

105) $$2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = 2\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{x}\right] + \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]} + (-1)^{\mu_\sigma+1}\mu_\sigma$$

106) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right) - [\alpha]$$

107) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] + \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right) - \mu_\sigma\sqrt{2}\sin\frac{(2\mu_\sigma+1)\pi}{4}$$

108) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = -\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=[\alpha]}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right) + [\alpha]$$

109) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] = \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] - \sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right) + \mu_\sigma\sqrt{2}\cos\frac{(2\mu_\sigma+1)\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe.

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, ist um $[\sqrt{n}]^2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt{n}]}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, ist um $[\sqrt{n}]^2$ kleiner, als die Anzahl der übrigen Divisoren.

Die Summe der σten Wurzeln aus jenen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen gleich den grössten ganzen Zahlen sind, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Die Summe der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um das $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$-fache der $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ten Trigonalzahl kleiner, als die Summe jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Summe der dritten Potenzen der σten Wurzeln aus jenen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der Summe der Quadrate derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Die Summe der Cuben der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist um das $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$fache des Quadrates der $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ten Trigonalzahl kleiner, als die Summe der Quadrate jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Die Summe aus der Anzahl der geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, und der Zahl n übertrifft die Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}}, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}}, \ldots, \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind, die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, und der Grösse $(-1)^{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]$ übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind, die Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen sind, und der Zahl n übertrifft die Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind, um die Differenz aus der Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind und der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind und oberhalb der angegebenen Grenze liegen, um eben so viel als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind, grösser ist, als die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke:

$$\sqrt{2}\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\sin\frac{\pi}{4}\left\{2\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]+1\right\}$$

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, von der Summe aus der Anzahl der übrigen ganzen grössten Zahlen und der Zahl n übertroffen wird.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind, und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, von der Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke

$$\sqrt{2}\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\cos\frac{\pi}{4}\left\{2\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]+1\right\}$$

übertroffen wird.

Es mag erwähnt werden, dass die Gleichung 87) schon von Herrn Lipschitz, die Gleichung 102) von Herrn E. Cesaro abgeleitet wurde. Bezeichnet man mit $\psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(r)$ die Anzahl derjenigen Divisoren von r, welche nicht grösser als $[\sqrt{n}]$ sind und mit $\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(r)$ die Anzahl der übrigen Divisoren von r, so folgt aus 87) die Beziehung:

110) $$\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)=[\sqrt{n}]^2$$

oder:

111) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)=n+2\varepsilon\sqrt{n}+\varepsilon^2 \qquad (0\leqq\varepsilon<1)$$

und daher hat man:

112) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)-\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)}{n}=1$$

Berücksichtigt man, dass unter denjenigen Divisoren einer Zahl r, welche nicht grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, stets die Zahl 1 vorkommt, so liefert diese Gleichung folgendes Theorem:

Abgesehen von dem Divisor 1 hat jede ganze Zahl n im Mittel eben so viele Divisoren, welche grösser als $[\sqrt{n}]$ sind, als solche, welche die angegebene Grenze nicht überschreiten.

Aus der bekannten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi(x)=\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)+\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)=n(\log n+2C-1)+\Delta,$$

wo C die Euler'sche Constante, und:

$$|\Delta|<4\sqrt{n}$$

st, folgt sofort:

113) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)=\frac{n}{2}(\log n+2C)+\Delta_1$$

114) $$\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}]}(x)=\frac{n}{2}(\log n+2C-2)+\Delta_2,$$

wo:

$$|\Delta_1|<6\sqrt{n}+1$$
$$|\Delta_2|<6\sqrt{n}+1$$

ist.

Aus den letzten zwei Gleichungen ergeben sich die Relationen:

115) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{0,\,[\sqrt{n}\,]}(x)}{n} = \frac{1}{2}(\log n + 2\,C)$$

116) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,\,[\sqrt{n}\,]}(x)}{n} = \frac{1}{2}(\log n + 2\,C - 2),$$

welche folgende Theoreme liefern:

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche nicht grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, ist für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\log n + C.$$

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, ist für sehr grosse n gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\log n + C - 1.$$

Ist n kein Quadrat, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren von n, welche nicht grösser als die grösste ganze Zahl sind, welche in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}(\log n + 2\,C + 1).$$

Ist n kein Quadrat, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren von n, welche grösser als die grösste ganze Zahl sind, die in der Quadratwurzel aus n enthalten ist, im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}(\log n + 2\,C - 1).$$

Setzt man in den Gleichungen 81) und 82):

117) $$f(x) = \log x,$$

so erhält man die speciellen Formeln:

118) $$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x = \sum_{x=1}^{x=[\alpha]} \log \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x^\sigma}}\right]!\right\}$$

119) $$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x = \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma} \left[\frac{\alpha}{x^\sigma}\right] \log x + \sum_{x=1}^{x=\mu_\sigma} \log \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\} - \mu_\sigma \log(\mu_\sigma!),$$

oder auch:

120) $$\prod_{x=1}^{[\alpha]} P_\sigma(x) = \prod_{p=1}^{[\alpha]} \left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\}^\sigma$$

121) $$(\mu_\sigma!)^{\mu_\sigma} \prod_{x=1}^{[\alpha]} P_{\sigma,\,\mu_\sigma}(x) = \prod_{x=1}^{\mu_\sigma} \left\{\left[\sqrt{\frac{\alpha}{x}}\right]!\right\}^\sigma,$$

wo $P_\sigma(x)$ das Product aller Divisoren von x bezeichnet, welche σte Potenzen sind, $P_{\sigma,\mu_\sigma}(x)$ aber das Product derjenigen von den eben genannten Divisoren, welche grösser als μ_σ^σ sind.

Man hat daher die Theoreme:

Das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen sind, ist gleich der σten Potenz des Productes derjenigen Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{n}}$$

enthalten sind.

Das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche σte Potenzen und grösser als $\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]^\sigma$ sind, ist der $\left\{\left(\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\right)!\right\}^{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}$te Theil der σten Potenz des Productes jener Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{3}},\ldots,\ \sqrt[\sigma]{\frac{n}{\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}}$$

enthalten sind.

Das Product der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich dem Producte derjenigen Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{3},\ldots,\ \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Ist:

$$\alpha = n^\sigma$$

$$n = n_1 . n_2\,;$$

und setzt man:

$$p = n_1,$$

so wird:

$$A = \left[\frac{\alpha}{(n_1+1)^\sigma}\right] < n_2^\sigma.$$

Ist nun:

$$A = n_2^\sigma - \varkappa \qquad (\varkappa > 0),$$

so hat man:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma-\lambda}} < n_1+1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1).$$

Bei dem angegebenen Werthe von α ist aber andererseits auch:

$$n_1 \leqq \sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma-\lambda}},$$

und daher:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{n_2^\sigma-\lambda}}\right] = n_1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1).$$

Man hat demnach die Formel:

122) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}F\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma F(n_1)$$

aus welcher für $\sigma=1$ die specielle Relation:

123) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n}{x}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2}F\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-n_2F(n_1),$$

folgt.

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich wieder die speciellen Relationen:

124) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]-n\,n_2^{\sigma-1}$$

125) $$\sum_{x=1}^{x=n}\bar{\psi}_{0,\,n_1}(x)=\sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{n}{x}\right]-n$$

126) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}D\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma D(n_1)$$

127) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}D^2\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-n_2^\sigma D^2(n_1)$$

128) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]^m-n_2^\sigma n_1^m$$

129) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right](2x-1)+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]^2-n_2^\sigma n_1^2$$

130) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\log x=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\log x+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\log\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]!\right\}-n_2^\sigma\log(n_1!)$$

131) $$(n_1!)^{n_2^\sigma}\prod_{x=1}^{n^\sigma}P_{\sigma,\,n_1}(x)\doteq\prod_{x=1}^{n_2^\sigma}\left(\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]!\right)^\sigma$$

132) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-\sqrt{2}\,n_2^\sigma\sin^2\frac{n_1\pi}{4}$$

133) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]\right)-\frac{n_2^\sigma}{\sqrt{2}}\sin\frac{n_1\pi}{2}$$

134) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\cos x\vartheta+\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+1\right\}\right)-\frac{n_2^\sigma\sin\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$135)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\left\{2\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+1\right\}\right)+\frac{n_2^\sigma\cos\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$136)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=n_1}(-1)^x\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}(-1)^{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]}+(-1)^{n_1+1}n_2^\sigma$$

$$137)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)-$$
$$-\sqrt{2}\,n_2^\sigma\sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$$

$$138)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{n^\sigma}{x^\sigma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2^\sigma}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{n}{\sqrt[\sigma]{x}}\right]+\frac{1}{2}\right\}\right)+$$
$$+\sqrt{2}\,n_2^\sigma\cos\frac{(2n_1+1)\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden bosonders erwähnt werden:

Ist $n=n_1 n_2$, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind um $n\,n_2^{\sigma-1}$ kleiner als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind.

Ist $n=n_1 n_2$, so ist die Summe der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, um $\frac{n(n_1+1)n_2^{\sigma-1}}{2}$ kleiner, als die Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind.

Ist $n=n_1 n_2$, so ist die Summe der dritten Potenzen der σten Wurzeln aus denjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, um $\frac{n^2 n_2^{\sigma-2}(n_1+1)^2}{4}$ kleiner, als die Summe der Quadrate jener Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}},\ \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}},\ldots,\ n_1$$

enthalten sind.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist das Product derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n^σ, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, der $(n_1!)^{n_2^\sigma}$te Theil des Productes jener Factoriellen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen bestimmt werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}}, \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}}, \ldots, n_1$$

enthalten sind.

Die Summe aus der doppelten Anzahl derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen und grösser als n_1^σ sind, und der Grösse $(-1)^{n_1} n_2^\sigma$ übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen Divisoren, welche σte Potenzen sind und die angegebene Grenze überschreiten, um eben so viel, als die Anzahl der geraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}}, \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}}, \ldots, n_1$$

enthalten sind, die Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen übertrifft.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen von mehrfachgeraden Zahlen und grösser als n_1^σ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze befindlichen Divisoren, welche σte Potenzen von geraden Zahlen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}}, \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}}, \ldots, n_1$$

enthalten und von der Form $4r$ oder $4r+1$ sind, grösser ist, als die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $\sqrt{2}\, n_2^\sigma \sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$.

Die doppelte Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $(n_1 n_2)^\sigma$, welche σte Potenzen von Zahlen der Form $4s+1$ und grösser als n_1^σ sind, übertrifft die doppelte Anzahl der übrigen, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden, ungeraden Divisoren, welche σte Potenzen sind, um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2^{\frac{1}{\sigma}}}, \frac{n}{3^{\frac{1}{\sigma}}}, \ldots, n_1$$

enthalten sind, und die Form $4s$ oder $4s+3$ besitzen, die Summe aus der Anzahl der übrigen grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $\sqrt{2}\, n_2^\sigma \cos\frac{(2n_1+1)\pi}{2}$ übertroffen wird.

Aus der Gleichung 125) folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x) = n \sum_{x=1}^{x=n_2} \frac{1}{x} - \sum_{x=1}^{x=n_2} \varepsilon_x - n \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1),$$

oder:

$$139) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x) = n\,\{\log n_2 + C - 1\} - \Delta,$$

wo:

$$|\Delta| < n_2 + n_1$$

ist.

Sind n_1 und n_2 so gewählt, dass:

$$\lim_{n_1 n_2=\infty} \frac{n_2+n_1}{n_1 n_2} = 0$$

ist, so hat man die Relation:

$$140)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x)}{n} = \log n_2 + C - 1\,,$$

welche das folgende Theorem liefert:

Das arithmetische Mittel derjenigen Anzahlen der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $n = n_1 n_2$, welche grösser als n_1 sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\log n_2 + C - 1\,,$$

wenn $\lim_{n=\infty} \frac{n_2+n_1}{n} = 0$ ist.

Aus 140) folgen sofort die Relationen:

$$141)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{0,n_1}(x)}{n} = \log n_1 + C$$

$$142)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{0,n_1}(x) - \sum_{x=1}^{x=n} \bar{\psi}_{0,n_1}(x)}{n} = 1 + \log \frac{n_1}{n_2}$$

$$143)\qquad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,10^r}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \bar{\psi}_{0,10^r}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right) \log 10 + C - 1$$

$$144)\qquad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,10^r}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \psi_{0,10^r}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = r \log 10 + C\,,$$

aus welchen sich folgende Theoreme ergeben:

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis $n = n_1 n_2$, welche nicht grösser als n_1 sind, ist gleich dem Ausdrucke:

$$\log n_2 + C\,,$$

wenn $\lim_{n=\infty} \frac{n_2+n_1}{n_1 n_2} = 0$ ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel bei hinlänglich grossem r:

$$s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right) \log 10 + C - 1.$$

Divisoren, welche grösser als 10^r sind:

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel bei hinlänglich grossem r:

$$r \log 10 + C$$

Divisoren, welche weniger als r Ziffern besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat bei hinlänglich grossem r im Mittel:

$$\log 10$$

r-zifferige Divisoren.

Setzt man in der Gleichung 77)

$$\tau = \sigma = 1, \quad \beta = \rho = 0, \quad \alpha = n, \quad b = \varkappa,$$

so erhält man die Formel:

145) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) + \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right) - A F(p) + B F\left(\left[\frac{n}{\varkappa}\right]\right).$$

Ist nun wieder:

$$n = n_1 n_2$$

und setzt man:

$$p = n_1$$

so hat man:

146) $$A = \left[\frac{n}{\varkappa n_1 + \varkappa}\right] = \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda$$

$$B = \left[\frac{n}{\varkappa\left[\frac{n}{\varkappa}\right]}\right] = 1.$$

Aus der Gleichung 146) folgt:

$$\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda \leqq \frac{n}{\varkappa(n_1+1)} \leqq \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + 1,$$

und daher ist:

$$\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}} < n_1 + 1 \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots, \lambda)$$

Wäre nun auch:

$$\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}} < n_1$$

so hätte man:

$$n_2 < \varkappa\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \varkappa(\lambda - \rho),$$

oder:

$$0 < -\mu - \varkappa(\lambda - \rho)$$

wo:

$$0 \leqq \mu \leqq \varkappa - 1$$

ist. Da diese Beziehung aber unmöglich ist, so hat man die Gleichung:

$$\left[\frac{n}{\varkappa\left\{\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] - \lambda + \rho\right\}}\right] = n_1 \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots, \lambda).$$

Die Gleichung 145) verwandelt sich daher in dem eben erwähnten speciellen Falle in:

147) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n_1} \left[\frac{n}{\varkappa x}\right] f(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]} F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right) - \left[\frac{n_2}{\varkappa}\right] F(n_1).$$

Durch ein analoges Verfahren kann man auch die folgende Gleichung ableiten:

148) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_1}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=n_2}F\left(\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]\right)-n_2F\left(\left[\frac{n_1}{\varkappa}\right]\right).$$

Setzt man in der Gleichung 147):

$$f(x)=1,$$

so erhält man:

149) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\left[\frac{n}{\varkappa x}\right]-n_1\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]$$

wenn mit $\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)$ die Anzahl derjenigen Divisoren von x bezeichnet wird, welche Vielfache von $\varkappa$ und grösser als $\varkappa n_1$ sind, mit $\bar\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)$ aber die Anzahl der übrigen durch $\varkappa$ theilbaren Divisoren.

Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort die folgende:

150) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\frac{n}{\varkappa}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\frac{1}{x}-\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n_2}{\varkappa}\right]}\varepsilon_x-\frac{n}{\varkappa}+\varepsilon n_1 \qquad (0\leqq\varepsilon,\varepsilon_x<1)$$

aus welcher die Formel:

151) $$\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)=\frac{n}{\varkappa}\left\{\log n_2+C-\log\varkappa-1\right\}+\Delta$$

ensteht, wo:

152) $$|\Delta|<(\varkappa+2)n_1+\frac{n_2}{\varkappa}$$

ist.

Ist:

$$\lim_{n_1 n_2=\infty}\frac{\varkappa+2}{n_2}+\frac{1}{\varkappa n_1}=0,$$

so hat man:

153) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n_2+C-1-\log\varkappa\right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich:

154) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\psi_{0,\varkappa,0}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n+2C-1-\log\varkappa\right\},$$

und daher hat man auch:

155) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{x=1}^{x=n}\bar\psi_{0,\varkappa,\varkappa n_1}(x)}{n}=\frac{1}{\varkappa}\left\{\log n_1+C\right\}.$$

Man hat daher die Theoreme:

Ist $n=n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varkappa+2}{n_2}+\frac{1}{\varkappa n_1}=0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche Vielfache von $\varkappa$ und grösser als $\varkappa n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{\varkappa}\{\log n_2 + C - 1 - \log \varkappa\}.$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varkappa+2}{n_2} + \frac{1}{\varkappa n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche Vielfache von $\varkappa$ und nicht grösser als $\varkappa n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{\varkappa}\{\log n_1 + C\}.$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{4}{n_2} + \frac{1}{2n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\{\log n_2 + C - 1 - \log 2\}$$

Ist $n = n_1 n_2$ und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{4}{n_2} + \frac{1}{2n_1} = 0,$$

so ist das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen geraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche nicht grösser als $2n_1$ sind, gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{2}\{\log n_1 + C\}$$

Aus den Gleichungen 153) und 155) leitet man ferner folgende zwei Formeln her:

156)
$$\lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s}-1} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{1}{\varkappa}\left\{s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right)\log 10 + C - 1 - \log \varkappa\right\}$$

157)
$$\lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s}-1} \psi_{0,\varkappa,10^r\varkappa}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \frac{1}{\varkappa}\{r \log 10 + C\}$$

wo:

$$\lim_{s,r=\infty} \frac{\varkappa+2}{10^{s-r}} + \frac{1}{10^r . \varkappa} = 0$$

ist:

Man hat daher die Sätze:

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\varkappa}\left\{s \log 10 - \left(r - \frac{1}{9}\right)\log 10 + C - 1 - \log \varkappa\right\}$$

durch $\varkappa$ theilbare Divisoren, welche grösser als $10^r . \varkappa$ sind, wenn:

$$\lim_{s,r=\infty} \frac{\varkappa+2}{10^{s-r}} + \frac{1}{\varkappa . 10^r} = 0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\varkappa}\{r\log 10+C\}$$

durch $\varkappa$ theilbare Divisoren, welche nicht grösser als $10^r.\varkappa$ sind, wenn:

$$\lim_{s,\,r=\infty}\frac{\varkappa+2}{10^{s-r}}+\frac{1}{10^r.\varkappa}=0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left\{s\log 10-\left(r-\frac{1}{9}\right)\log 10+C-1-\log 2\right\}$$

gerade Divisoren, welche grösser als 2.10^r sind, wenn:

$$\lim_{s,r=\infty}\frac{4}{10^{s-r}}+\frac{1}{2.10^r}=0$$

ist.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\{r\log 10+C\}$$

gerade Divisoren, welche nicht grösser als 2.10^r sind, wenn:

$$\lim_{s,r=\infty}\frac{4}{10^{s-r}}+\frac{1}{2.10^r}=0$$

ist.

Schliesslich mag noch folgende Summe betrachtet werden:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x).$$

Nun ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\,y=1}^{x=n,\,y=\left[\frac{\beta+\zeta+\sqrt{\beta_1^2+\delta+\varepsilon}}{\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma y x^\sigma}\right)f(x)$$

oder, weil jedesmal, wenn:

$$\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma y x^\sigma}\ \substack{\geq\\ <}\ 1$$

ist, auch:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\ \substack{\geq\\ <}\ 1$$

ist, so hat man:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\,y=1}^{x=n,y=\left[\frac{\beta+\zeta+\sqrt{\beta^2+\delta+\varepsilon}}{\gamma}\right]}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\right)f(x)$$

$$=\sum_{y=B+1,x=1}^{y=A,x=n}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{(\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y)x^\sigma}}\right)f(x)-AF(p)+BF(n)$$

$$=\sum_{y=B+1}^{y=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma y-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2y^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta y}}\right]\right)-AF(p)+BF(n)$$

wo:

$$A=\left[\frac{\beta+\zeta(p+1)^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta(p+1)^\sigma+\varepsilon(p+1)^{2\sigma}}}{\gamma(p+1)^\sigma}\right]$$

$$B=\left[\frac{\beta+\zeta n^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta n^\sigma+\varepsilon n^{2\sigma}}}{\gamma n^\sigma}\right]$$

ist.

Man hat daher die Relation:

158) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)+$$
$$+\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)-AF(p)+BF(n),$$

welche für $p=0$ in die folgende übergeht:

159) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)+BF(n).$$

Ist:

$$n>\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma+\delta-2\beta\zeta}{\zeta^2+\gamma^2-\varepsilon-2\gamma\zeta}}$$

so wird:

$$B=0$$

und man hat:

161) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)-AF(p)$$

162) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser allgemeinen Formeln mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

163) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]$$

164) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]^2$$

165) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=A}D\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)$$

166) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=A}D^2\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]\right)$$

167) $$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\beta+\zeta x^\sigma+\sqrt{\beta^2+\delta x^\sigma+\varepsilon x^{2\sigma}}}{\gamma x^\sigma}\right]=\sum_{x=1}^{x=A}(-1)^{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{2\beta\gamma x-2\beta\zeta+\delta}{\gamma^2x^2+\varepsilon-\zeta^2-2\gamma\zeta x}}\right]}$$

168) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+8}}{4}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+12}}{6}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+16}}{8}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{m}{1}+\frac{1}{1}\right]^2+\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right]^2+\left[\frac{m}{3}+\frac{1}{9}\right]^2+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{16}\right]^2+\ldots$$

169) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{4}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{6}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{8}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{m}{1}+\frac{1}{4}\right]^2+\left[\frac{m}{2}+\frac{1}{16}\right]^2+\left[\frac{m}{3}+\frac{1}{36}\right]^2+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{64}\right]^2+\ldots$$

170) $$\left[\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{3}\right]+3\left[\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{6}\right]+5\left[\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{9}\right]+7\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{12}\right]+\ldots=$$
$$=\left[\frac{2m}{3}+\frac{1}{9}\right]^2+\left[\frac{2m}{6}+\frac{1}{36}\right]^2+\left[\frac{2m}{9}+\frac{1}{81}\right]^2+\ldots$$